

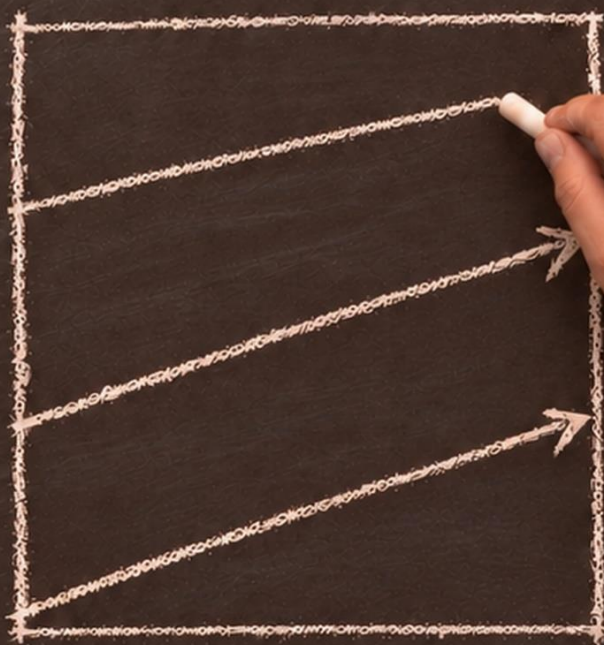


Corridor of Comprehensive Knowledge

# MARYAM

## COUNTING CLOSED PATHS

A MATHEMATICAL EXPLORATION IN HER MEMORY



cck@theccck.com  
www.theccck.com



"آها!" کلمه‌ای پراحساس بر زبان ریاضی‌دان نابغه‌ای بود که با آن، لحظه‌ی پرهیجان کشف و رسیدن به درکی تازه را بیان می‌کرد؛ گویی پس از پیمودن مسیری طولانی، بر فراز تپه‌ای ایستاده و ناگهان چشم‌اندازی روشن پیش رویش گشوده شده است [۱].

مریم میرزاخانی در سال ۱۳۵۶ خورشیدی (۱۹۷۷ میلادی) در تهران زاده شد. پس از تحصیل در دانشگاه صنعتی شریف، در سال ۲۰۰۴ دکتری ریاضی خود را از دانشگاه هاروارد دریافت کرد و بعدها استاد دانشگاه استنفورد شد. پژوهش‌های او، از شمارش مسیرهای بسته‌ی ساده روی سطح‌های خمیده تا بررسی هندسه و پویایی فضاها پیچیده، پیوندهایی عمیق میان شاخه‌های گوناگون ریاضیات برقرار کرد [۲].

او در سال ۲۰۱۴، به سبب سهم برجسته‌اش در "دینامیک و هندسه‌ی سطوح ریمانی و فضاها‌ی مدولی آن‌ها"، مدال فیلدز را دریافت کرد و نخستین زن و نخستین ایرانی دریافت‌کننده‌ی این مدال شد [۳].

مریم میرزاخانی در ۱۴ ژوئیه‌ی ۲۰۱۷، پس از مبارزه با سرطان، در چهل سالگی درگذشت؛ اما مسئله‌ها، روش‌ها و چشم‌اندازهایی که پدید آورد، همچنان در ریاضیات زنده‌اند [۴]. زادروز او، ۱۲ مه، به عنوان بزرگداشت «زنان در ریاضیات» برگزیده شده است و از سال ۲۰۱۹ هر سال در سراسر جهان گرامی داشته می‌شود [۵].

# از نقاط قابل دیدن تا شمارش مسیرهای ساده

## یک کاوش ریاضی به یاد مریم میرزاخانی

### چکیده

این مقاله کاوشی پیوسته برای دانش‌آموزان دبیرستان و خوانندگان علاقه‌مند به ریاضیات ارائه می‌کند. ابتدا مسئله‌ای دربارهٔ حرکت با شیبی ثابت بر روی مربع واحد و تشکیل مسیرهای بسته مطرح می‌شود. سپس برای پاسخ‌دادن به پرسش‌های مسئله، مسیر حرکت در صفحه‌ای گسترده بررسی و ارتباط آن با شیب‌های گویا، زوج‌های نسبتاً اول و نقاط شبکه‌ای آشکار می‌شود. مفهوم دیده‌شدن نقاط شبکه‌ای از مبدأ، معیاری هندسی برای تشخیص زوج‌های نسبتاً اول فراهم می‌آورد و محدودیت طول مسیر، مسئله را به شمارش این نقاط درون ربع دایره تبدیل می‌کند. در ادامه، ابتدا همه‌ی نقاط شبکه‌ای و سپس نقاط نسبتاً اول شمارش می‌شوند و با استفاده از اصل شمول و عدم شمول و تابع موبیوس، قانون رشد مجانبی تعداد مسیرها به دست می‌آید. حالت مستطیلی مسئله نیز به اختصار بررسی می‌شود. در پایان، ساختار پرسش‌ها و نتایج این مدل ساده با مسئله‌ی شمارش منحنی‌های بسته‌ی ساده در پژوهش مریم میرزاخانی مقایسه می‌شود. مدل حاضر نه حالت خاص مستقیمی از قضیه‌ی میرزاخانی و نه بازسازی تاریخی مسیر کشف او است؛ بلکه نمونه‌ای آموزشی برای نشان‌دادن چگونگی گذار از یک مسئله‌ی هندسی به یک مسئله‌ی شمارشی و از مشاهده و حدس به اثبات است.

**واژگان کلیدی:** نقاط شبکه‌ای، اعداد نسبتاً اول، مسیر بسته‌ی ساده، شمارش مجانبی، تابع موبیوس، مریم میرزاخانی.

### ۱) مقدمه

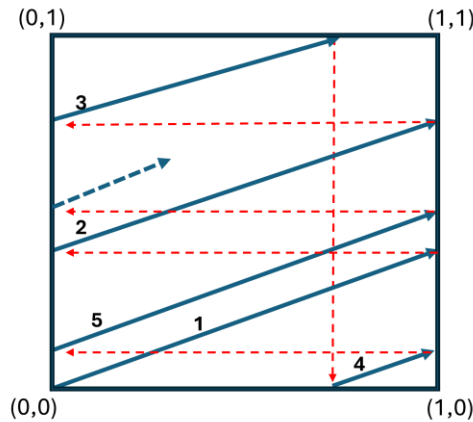
پژوهش‌های مریم میرزاخانی، ریاضی‌دان برجسته‌ی ایرانی و برنده‌ی مدال فیلدز سال ۲۰۱۴، در هندسه و دینامیک سطوح و فضاهای پارامتری آن‌ها بود. بخشی از کار او به شمارش منحنی‌های بسته‌ی ساده با طول محدود مربوط است؛ مسئله‌ای که در ظاهر تنها یک پرسش شمارشی است، حل آن به ترکیبی عمیق از هندسه، توپولوژی، نظریه‌ی اندازه و دینامیک نیاز دارد [۶-۸]. استفاده از یک مدل تخت و دوبعدی برای ورود به این مسئله در منابع معتبر نیز سابقه دارد. در یک متن آموزشی منتشرشده از مؤسسه‌ی پژوهشی اوبروولفاخ، مسیرهای بسته‌ی ساده روی توروس مربعی با بردارهای اولیه‌ی شبکه متناظر می‌شوند و قانون رشد درجه دوم آن‌ها مقدمه‌ای برای بیان قضیه‌ی مریم درباره‌ی شمارش منحنی‌های بسته‌ی ساده روی سطوح هذلولوی قرار می‌گیرد [۹]. همچنین آرانا-هررا در یک مقاله‌ی مروری پژوهشی، شمارش نقاط اولیه‌ی شبکه را راهنمایی مقدماتی برای فهم سازوکارهای کلی اثبات مریم معرفی می‌کند [۱۰]. مقاله‌ی حاضر همین مسیر آموزشی را، با تمرکز بر ربع نخست، برآورد هندسی نقاط شبکه‌ای و استفاده‌ی صریح از تابع موبیوس، در قالبی کاوش‌محور دنبال می‌کند.

بر این اساس یک مدل آموزشی بسیار ساده ولی هم‌فرم با یکی از پژوهش‌های بسیار پیچیده‌ی او مطرح می‌شود. محدودیت طول، شمارش مسیرهای متمایز و یافتن قانون رشد حدی سه عامل مشترک بین مسئله‌ی ساده‌ی این مقاله و پژوهش پیچیده‌ی اوست. در واقع عظمت کار مریم در حل پرسشی از نوع مطرح‌شده در این مقاله برای سطوحی بسیار پیچیده‌تر و در پیوند دادن پاسخ با ساختار کلی فضای سطوح است.

با این وجود بایستی توجه داشت که هدف این مقاله ارائه‌ی نسخه‌ای ساده‌شده از قضایای میرزاخانی نیست. مسئله‌ای که در ادامه حل می‌شود، در هندسه‌ای تخت و بسیار منظم قرار دارد و با ابزارهای نظریه‌ی اعداد و هندسه‌ی دبیرستانی، همراه با یک بخش تکمیلی کمی پیشرفته‌تر، قابل بررسی است. ارزش آموزشی آن تنها در ارائه‌ی فرایند پژوهش و کاوش است. این که چگونه مسئله‌ای که در نگاه اول پیچیده به نظر می‌رسد را با تبدیل مناسب به روندی ساده‌تر برای حل تبدیل کنیم. نتیجه‌ی نهایی نیز از لحاظ فرم، شباهت‌های جالبی با نتیجه‌ی حاصل‌شده در پژوهش مریم دارد.

## (۲) طرح مسئله

مربع واحد واقع بر محور مختصات و با رئوس  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  را در نظر بگیرید. با شروع از نقطه‌ی  $(0,0)$  و با شیب مثبت  $m$  حرکت می‌کنیم. با رسیدن به نقطه‌ای روی هر یک از اضلاع مربع، ادامه‌ی حرکت از نقطه‌ی متناظر در ضلع مقابل و با همان شیب ادامه می‌یابد (می‌توانید تصور کنید که مربع تا شده و نقاط متناظر بر روی هم قرار گرفته‌اند). در نهایت با رسیدن به نقطه‌ی  $(1,1)$  که متناظر با  $(0,0)$  است، مسیر بسته شده و حرکت پایان می‌یابد (شکل ۱).



شکل ۱) نمایی از روند حرکت از نقطه‌ی  $(0,0)$  به نقطه‌ی  $(1,1)$

با در نظر گرفتن این روند، هدف یافتن پاسخ سوالات زیر است:

**سوال ۱:** به ازای چه مقادیری از  $m$  به نقطه‌ی  $(1,1)$  می‌رسیم (تشکیل مسیر بسته) و به ازای چه مقادیری به این نقطه نمی‌رسیم؟

**سوال ۲:** طول مسیر برابر با مجموع طول قطعات مسیر بر روی مربع تعریف می‌شود. در این صورت برای عدد داده‌شده‌ی  $L$  تعداد مسیرهایی که طول آنها بر روی مربع کوچک‌تر یا مساوی  $L$  باشد، چگونه تعیین می‌شود؟

**سوال ۳:** تعداد مسیرهای مطرح‌شده در سوال ۲، با بزرگ‌شدن  $L$  چگونه رشد می‌کند؟ مطالبی که در ادامه مطرح می‌شود، در راستای پاسخ به این سوالات می‌باشد.

## (۳) قراردادهای و نمادها

صفحه‌ی شبکه‌ای مجموعه‌ی نقاطی است که هر دو مختصات آن‌ها عدد صحیح است:

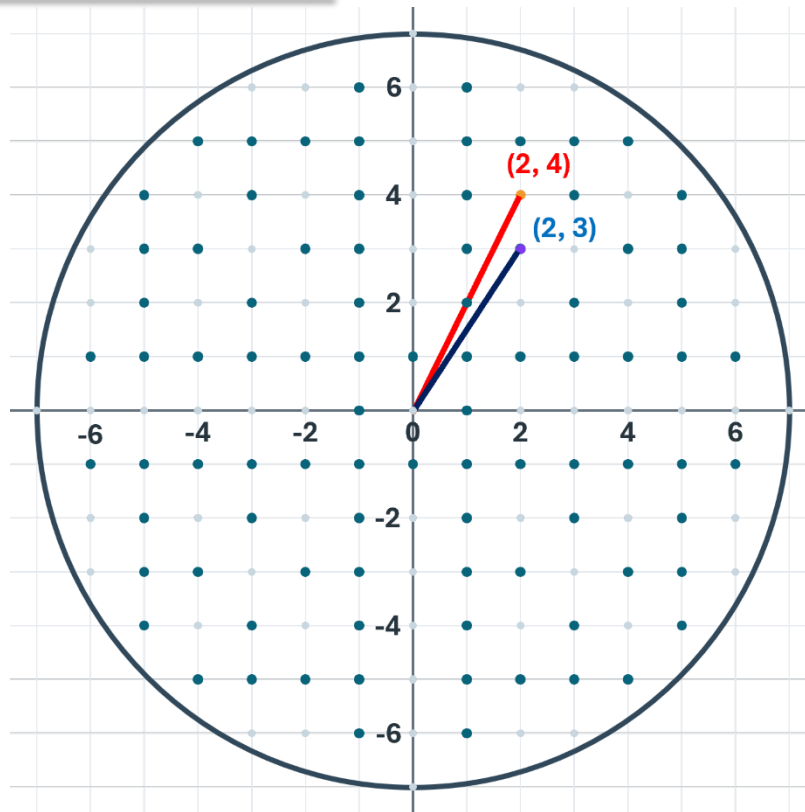
$$\mathbb{Z}^2 = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Z}\}$$

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح و مثبت  $p$  و  $q$  را با نماد  $\gcd(p, q)$  نشان می‌دهیم. دو عدد صحیح  $p$  و  $q$  نسبتاً اول‌اند هرگاه  $\gcd(p, q) = 1$ .

نماد  $f(L) \sim g(L)$  به این معناست که  $\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{f(L)}{g(L)} = 1$ .

و نماد  $E(L) = O(h(L))$  به معنای آن است که ثابت  $\delta > 0$  و مستقل از  $L$  وجود دارد که برای همه‌ی مقادیر به‌اندازه‌ی کافی بزرگ  $L$  داریم  $|E(L)| \leq \delta |h(L)|$ .

اکنون و در شکل ۲ از مبدأ به نقطه‌ی شبکه‌ای  $(2,4)$  نگاه کنید. نقطه‌ی  $(1,2)$  روی همان پاره‌خط و پیش از آن قرار دارد؛ بنابراین  $(2,4)$  مستقیماً از مبدأ دیده نمی‌شود. در مقابل، میان مبدأ و نقطه‌ی  $(2,3)$  هیچ نقطه‌ی شبکه‌ای دیگری روی همان خط وجود ندارد.



شکل ۲) نقاط پررنگ از مبدأ قابل دیدن هستند.

نشان می‌دهیم که دیده شدن نقطه‌ی  $(p, q)$  معادل نسبتاً اول بودن مختصات آن است. برای این منظور فرض کنید:

$$\gcd(p, q) = d > 1$$

پس اعداد صحیح  $a$  و  $b$  وجود دارند که:

$$p = da, \quad q = db$$

در نتیجه:

$$(p, q) = d(a, b)$$

نقطه‌ی  $(a, b)$  روی همان راستای مبدأ و  $(p, q)$  قرار دارد و چون  $d > 1$  است، پیش از  $(p, q)$  دیده می‌شود. بنابراین  $(p, q)$  قابل دیدن نیست.

برعکس، اگر نقطه‌ی  $(p, q)$  قابل دیدن نباشد، اگر از مجموعه‌ی نقاط شبکه‌ای واقع بر پاره‌خط میان مبدأ و  $(p, q)$  که ناتهی و متناهی است، نخستین نقطه‌ی پس از مبدأ را  $(a, b)$  بنامیم، مختصات این نقطه نسبتاً اول‌اند؛ زیرا در غیر این صورت با تقسیم هر دو مختصات بر مقسوم‌علیه مشترک، نقطه‌ی شبکه‌ای نزدیک‌تری به مبدأ به دست می‌آمد.

چون  $(a, b)$  و  $(p, q)$  روی یک نیم‌خط قرار دارند، عدد گویای  $d > 1$  وجود دارد که:

$$(p, q) = d(a, b)$$

کسر  $d = r/s$  را در ساده‌ترین صورت در نظر می‌گیریم. از  $p = ra/s$  و  $q = rb/s$  و صحیح بودن  $p$  و  $q$  نتیجه می‌شود که  $s$  هر دو عدد  $a, b$  را تقسیم می‌کند. چون  $\gcd(a, b) = 1$  است، باید  $s = 1$  باشد؛ پس  $d$  عددی صحیح و بزرگ‌تر از یک است. بنابراین  $d$  مقسوم‌علیه مشترک  $p$  و  $q$  است و  $(p, q)$  نسبتاً اول نیست.

بنابراین نقطه‌ی  $(p, q)$  دقیقاً هنگامی از مبدأ قابل دیدن است که:

$$\gcd(p, q) = 1$$

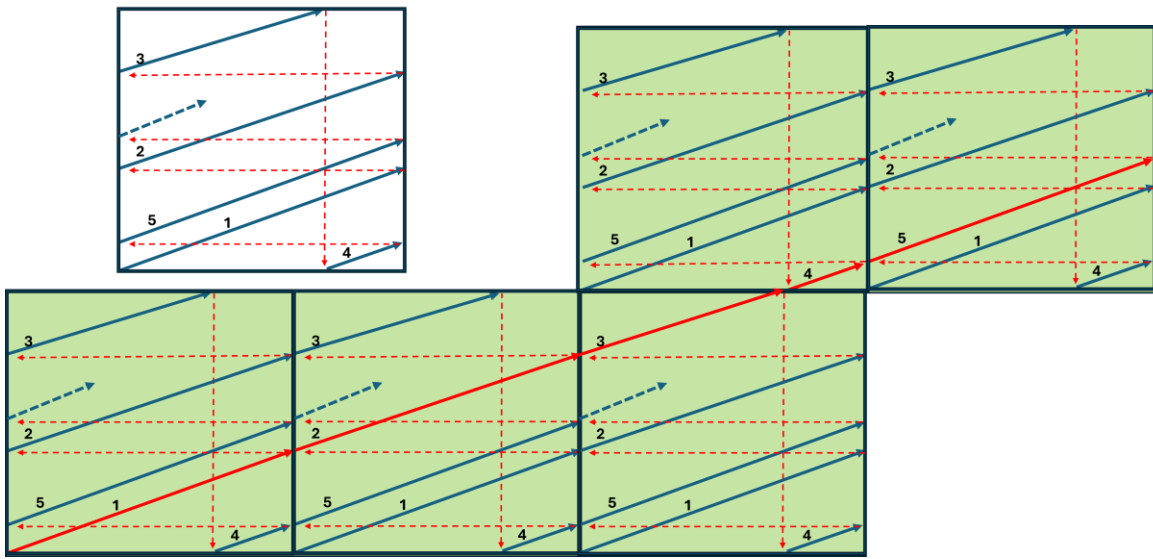
نقاطی که این شرط را دارند، نقاط پایه‌ای یا اولیه‌ی شبکه نیز نامیده می‌شوند.

#### (۴) پاسخ مسئله

اکنون به مسئله‌ی اولیه برمی‌گردیم. اگر در شکل ۱ شیب انتخابی یک عدد گویا باشد:

$$m = \frac{q}{p}$$

که در آن  $(p, q)$  نسبتاً اول است، و اگر پاره‌خط‌های شکل‌دهنده‌ی مسیر را به ترتیب و با شروع از  $(0,0)$  در امتداد هم قرار دهیم، در این صورت مسیر حرکت از مبدأ تا نقطه‌ی  $(p, q)$  خواهد بود (توجه کنید که این کار را می‌توان از لحاظ شهودی با کپی‌برداری از مربع واحد و غلتاندن آن در مسیرهای افقی و عمودی انجام داد (شکل ۳).



شکل (۳) تبدیل مسیر به یک خط مستقیم

این ویژگی تضمین می‌کند که مختصات ابتدا و انتهای تمام قطعات اعداد گویا و مختصات آخرین نقطه  $(p, q)$  خواهد بود. طول مسیر نیز از رابطه‌ی  $\sqrt{p^2 + q^2}$  به‌دست می‌آید. به این ترتیب یک مسیر بسته در مربع (دقت کنید که تعبیر مسیر بسته به دلیل تناظر بین  $(0,0)$  و  $(1,1)$  مطرح می‌شود.) و با شیب  $m = \frac{q}{p}$  معادل حرکت در صفحه‌ی مختصات از مبدأ تا نقطه‌ی  $(p, q)$  است. اگر  $(p, q)$  نسبتاً اول نباشد، و داشته باشیم،  $(p, q) = d(a, b)$  که در آن  $d$  عدد صحیح و  $(a, b)$  نسبتاً اول است، در این صورت با توجه به تناظر  $(1,1)$  با  $(0,0)$ ، حرکت تکراری بر روی مربع و به تعداد  $d$  بار خواهیم داشت. بر روی مربع واحد نیز به تعداد  $d$  بار با شروع از  $(0,0)$  به  $(1,1)$  می‌رسیم. مسیر معادل بر روی صفحه‌ی مختصات (شکل ۳)، پاره خطی است که  $d$  نقطه با مختصات صحیح را ملاقات می‌کند و آخرین آنها  $(p, q)$  است. برای  $d = 1$  و به‌طور معادل برای  $(p, q)$  نسبتاً اول، مسیر را ساده می‌نامیم.

تا اینجا نشان داده‌ایم که هر مسیر با شیب عدد گویای  $m = \frac{q}{p}$  بر روی مربع، یک مسیر بسته ایجاد می‌کند.

اگر  $m$  گویا نباشد، مسیر بسته ایجاد نمی‌شود. برای اثبات دقیق، موقعیت متحرک را در صفحه‌ی گسترده با پارامتر  $t$  به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(x(t), y(t)) = (t, mt)$$

برای بازگشت به مبدأ در مسیر متناظر روی مربع (و به عبارت دقیق‌تر برای رسیدن به نقطه‌ی  $(1,1)$ ) روی مربع باید هر دو مختصات عدد صحیح شوند. یعنی اعداد صحیح  $p$  و  $q$  باید وجود داشته باشند که:

$$\begin{aligned} t &= p \\ mt &= q \end{aligned}$$

از این دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$m = \frac{q}{p}$$

پس رسیدن به نقطه‌ی (1,1) فقط برای شیب گویا ممکن است.

تا اینجا به اولین سوالی که در ابتدای مقاله مطرح شد، پاسخ داده‌ایم.

طول مسیر بسته از جمع قطعات آن و از رابطه‌ی  $\sqrt{p^2 + q^2}$  به دست می‌آید. به این ترتیب تعداد مسیرهای ساده با طول حداکثر برابر با  $L$  معادل یافتن تمام نقاط  $(p, q)$  نسبتاً اولی است که مختصات آنها در رابطه‌ی  $\sqrt{p^2 + q^2} \leq L$  صدق می‌کند. پس زوج‌های متناظر با مسیرهای کوتاه‌تر از  $L$  درون ربع دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع  $L$  قرار می‌گیرند.

تا اینجا به سوال دومی که در ابتدای مقاله مطرح شد نیز پاسخ داده‌ایم. اکنون به سراغ پاسخ سوال ۳ یعنی روند رشد نقاط با بزرگ شدن  $L$  می‌رویم.

تابع  $P(L)$  را برابر تعداد زوج‌های طبیعی مثبت  $(p, q)$  می‌گیریم که هم شرط  $p^2 + q^2 \leq L^2$  و هم شرط  $\gcd(p, q) = 1$  را برآورده می‌کنند.

مسئله‌ی هندسی شمارش مسیرها اکنون به یک مسئله‌ی دقیق در نظریه‌ی اعداد تبدیل شده است.

پیش از شمردن نقاط نسبتاً اول، همه‌ی نقاط شبکه‌ای ربع نخست را می‌شماریم. تابع  $A(L)$  را برابر تعداد زوج‌های طبیعی  $(p, q)$  با  $p, q > 0$  در نظر می‌گیریم که شرط  $p^2 + q^2 \leq L^2$  را برآورده می‌کنند. بنابراین  $A(L)$  تعداد نقاط شبکه‌ای در ربع دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع  $L$  را نشان می‌دهد.

برای تعیین  $A(L)$ ، ابتدا برآوردی از تمام نقاط شبکه‌ای درون دایره‌ی کامل به مرکز مبدأ و شعاع  $L$  خواهیم داشت. اگر به مرکز هر نقطه‌ی شبکه‌ای مربعی به ضلع ۱ و با اضلاع همراستا با محورهای افقی و عمودی مختصات رسم کنیم، به سادگی می‌توان مشاهده کرد که  $B(L)$  مساحت حاصل از کل این مربع‌ها که از لحاظ عددی با تعداد نقاط شبکه‌ای در دایره برابر است، با فرض

$$c = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\pi(L - c)^2 \leq B(L) \leq \pi(L + c)^2$$

با بسط دو طرف به دست می‌آوریم:

$$\pi L^2 - 2\pi cL + \pi c^2 \leq B(L) \leq \pi L^2 + 2\pi cL + \pi c^2$$

بنابراین اختلاف میان  $B(L)$  و  $\pi L^2$  از مقداری متناسب با  $L$  بیشتر نمی‌شود. این نتیجه را به اختصار چنین می‌نویسیم:

$$B(L) = \pi L^2 + O(L) \quad (۱)$$

در این رابطه، نماد  $O(L)$  یک عدد مشخص نیست؛ بلکه بیانگر جمله‌ی خطایی است که اندازه‌ی آن حداکثر متناسب با  $L$  رشد می‌کند. به بیان دقیق‌تر و همان‌طور که پیش از این نیز بیان شد، ثابت  $\delta > 0$  وجود دارد، به‌طوری‌که برای همه‌ی مقادیر به‌اندازه‌ی کافی بزرگ  $L$ :

$$|B(L) - \pi L^2| \leq \delta L$$

پس جمله‌ی اصلی تعداد نقاط شبکه‌ای برابر مساحت قرص، یعنی  $\pi L^2$ ، است و خطای این تقریب حداکثر با آهنگی متناسب با شعاع رشد می‌کند. از نظر هندسی، این خطا از مربع‌های واقع در نواری با عرض ثابت در نزدیکی محیط دایره ناشی می‌شود. طول محیط دایره متناسب با  $L$  است؛ در نتیجه مساحت این نوار و تعداد مربع‌های آن نیز حداکثر از مرتبه‌ی  $L$  خواهد بود. اکنون به ربع نخست بازمی‌گردیم. فرض کنید  $A(L)$  تعداد نقاط شبکه‌ای  $(p, q)$  با  $p, q > 0$  باشد که شرط زیر را برآورده می‌کنند:

$$p^2 + q^2 \leq L^2$$

نقاط غیرمحوری قرص کامل به طور مساوی در چهار ربع قرار دارند. همچنین روی چهار نیم‌محور، در مجموع  $4[L]$  نقطه‌ی غیر از مبدأ وجود دارد ( $[L]$  نشانگر بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی  $L$  است). بنابراین:

$$B(L) = 1 + 4[L] + 4A(L)$$

در نتیجه:

$$A(L) = (B(L) - 1 - 4[L])/4$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱) و این واقعیت که تعداد نقاط محوری نیز حداکثر متناسب با  $L$  است، نتیجه می‌گیریم:

$$A(L) = \pi L^2/4 + O(L) \quad (۲)$$

بنابراین تعداد نقاط شبکه‌ای واقع در ربع نخست قرص به شعاع  $L$ ، در جمله‌ی اصلی از لحاظ عددی تقریباً با مساحت ربع قرص برابر است و اختلاف آنها حداکثر متناسب با  $L$  رشد می‌کند. این نتیجه هنوز درباره‌ی نقاط نسبتاً اول نیست؛ برای شمارش نقاط نسبتاً اول که تعداد آنها را در ربع نخست قرص به شعاع  $L$  با  $P(L)$  نشان می‌دهیم، به استدلال جداگانه‌ای نیاز داریم. برای رسیدن به نقاط نسبتاً اول، از میان نقاط شبکه‌ای ربع نخست باید نقاطی را حذف کنیم که هر دو مختصاتشان بر یک عدد اول مشترک بخش‌پذیر است.

نقاطی که هر دو مختصاتشان بر عدد  $d$  بخش‌پذیر است به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$(p, q) = (da, db) = d(a, b).$$

با توجه به این که  $a^2 + b^2 \leq \left(\frac{L}{d}\right)^2$  است، پس تعداد اعداد شبکه‌ای که با ضرب مختصات اعداد شبکه‌ای واقع در شعاع  $\frac{L}{d}$  در عدد  $d$  حاصل شده‌اند، با توجه به نتایج قبلی برابر  $A\left(\frac{L}{d}\right)$  است. بنابراین اگر مثلاً از  $A(L)$  مقدار  $A\left(\frac{L}{2}\right)$  را کم کنیم، در واقع نقاط شبکه‌ای که از دو برابر شدن مختصات نقاط موجود در ربع دایره‌ای به شعاع  $\frac{L}{2}$  ایجاد شده‌اند، از کل نقاط شبکه‌ای کم می‌شوند. اگر  $A\left(\frac{L}{3}\right)$  را کم کنیم، در واقع نقاط شبکه‌ای که از سه برابر شدن مختصات نقاط موجود در ربع دایره‌ای به شعاع  $\frac{L}{3}$  ایجاد شده‌اند، از کل نقاط شبکه‌ای کم می‌شوند. اما اگر هم  $A\left(\frac{L}{2}\right)$  و هم  $A\left(\frac{L}{3}\right)$  را کم کنیم، نقاطی که از شش برابر شدن مختصات نقاط موجود در ربع دایره‌ای به شعاع  $\frac{L}{6}$  ایجاد شده‌اند، دوبار کم می‌شوند و بایستی کم شدن اضافی آن جبران شود (اصل شمول و عدم شمول). این کم شدن‌ها و اضافه شدن‌های جبرانی برای حذف تمام نقاط شبکه‌ای که نسبتاً اول نیستند، باعث می‌شود که در روند تعیین تعداد اعداد نسبتاً اول به تابعی به نام تابع موبیوس با نماد  $\mu$  برسیم.

در نقطه‌ی یک مقدار این تابع برابر ۱ است ( $\mu(1) = 1$ ).

اگر مربع یک عدد اول،  $d$  را تقسیم کند ( $d$  بر مربع یک عدد اول بخش‌پذیر باشد)، مقدار تابع به ازای  $d$  برابر صفر است. به عنوان مثال  $\mu(12) = 0$ ؛ چون  $12 = 2^2 \times 3$  بر ۴ بخش‌پذیر است.

اگر  $d$  حاصل‌ضرب  $k$  عدد اول متمایز باشد، مقدار تابع برابر  $(-1)^k$  است. به عنوان مثال  $\mu(6) = (-1)^2 = 1$ ؛ چون  $6 = 2 \times 3$ .

خاصیت اساسی این تابع چنین است:

برای  $m = 1$  داریم:

$$\sum_{d|1} \mu(d) = \mu(1) = 1$$

نماد  $d | m$  به معنای آن است که  $m$  بر  $d$  بخش‌پذیر است ( $d$  عدد  $m$  را تقسیم می‌کند).

$$\sum_{d|m} \mu(d) = 0 \quad \text{برای } m > 1$$

به عنوان مثال  $\sum_{d|6} \mu(d) = \mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \mu(6) = 1 + (-1) + (-1) + 1 = 0$

در واقع در محاسبه‌ی  $\sum_{d|m} \mu(d)$ ، اگر مقسوم‌علیه‌های اول متمایز  $m$  را  $r_1, r_2, \dots, r_k$  بنامیم، این مجموع برای  $m > 1$  برابر بسط  $(1-1)^k$  و لذا مقدار آن برابر صفر خواهد بود.

از مجموع توضیحات فوق و چگونگی عملکرد تابع موبیوس می‌توان به این نتیجه رسید که

$$P(L) = \sum_{d \leq L} \mu(d) A\left(\frac{L}{d}\right) \quad (3)$$

در رابطه‌ی (۳)، تابع موبیوس در واقع نقش مجری اصل شمول و عدم شمول را بر عهده دارد. با توجه به رابطه‌ی (۲) داریم:

$$A(L/d) = \frac{1}{4}\pi L^2/d^2 + O(L/d) \quad (4)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۴) در رابطه‌ی (۳) خواهیم داشت:

$$P(L) = \frac{1}{4}\pi L^2 \sum_{d \leq L} \frac{\mu(d)}{d^2} + \sum_{d \leq L} \mu(d) O(L/d) \quad (5)$$

اکنون به نکات مهم زیر توجه کنید:

(۱) نشان داده شده که  $\sum_{d \leq L} \frac{1}{d}$  از مرتبه‌ی  $\log L$  است. عبارت  $|\sum_{d \leq L} \mu(d) O(L/d)|$  دارای کران  $L \sum_{d \leq L} \mu(d) O(L/d)$  می‌باشد.  $L \log L$  بوده و این عبارت از  $\sum_{d \leq L} \frac{1}{d}$  بیشتر نمی‌شود؛ پس جمله‌ی  $\sum_{d \leq L} \mu(d) O(L/d)$  از مرتبه‌ی  $L \log L$  می‌باشد.

(۲) همچنین ثابت شده که سری  $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$  به‌طور مطلق همگراست و مقدار آن برابر  $\frac{6}{\pi^2}$  است. در واقع اگر  $\mathbb{P}$  مجموعه‌ی اعداد اول باشد، با استفاده از حاصل ضرب اویلری و مقدار کلاسیک تابع زتای ریمان در عدد دو داریم [۱۱، ۱۲]:

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \prod_{r \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2} \quad (6)$$

(۳) عبارت  $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$  دارای دو بخش  $\sum_{d \leq L} \frac{\mu(d)}{d^2}$  و  $\sum_{d > L} \frac{\mu(d)}{d^2}$  می‌باشد. نشان داده شده که:

$$\left| \sum_{d > L} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| \leq \sum_{d > L} \frac{1}{d^2} = O\left(\frac{1}{L}\right) \quad (7)$$

به این ترتیب و از توضیحات فوق داریم:

$$\begin{aligned} P(L) &= \frac{1}{4}\pi L^2 \times \frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{L}\right) + O(L \log L) \\ &= 3L^2/(2\pi) + O(L \log L) \end{aligned} \quad (8)$$

بنابراین در یک برآورد تقریبی، برای  $L$  به اندازه‌ی کافی بزرگ، تعداد مسیرهای کوچک‌تر یا مساوی  $L$  در حدود  $3L^2/(2\pi)$  خواهد بود. از روابط (۲) و (۸) خواهیم داشت:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{P(L)}{A(L)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{3L^2/(2\pi) + O(L \log L)}{\pi L^2/4 + O(L)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{3L^2/(2\pi)}{\pi L^2/4} = 6/\pi^2 \approx 0.607927$$

به این ترتیب حدود ۶۰ درصد از نقاط شبکه‌ای، نقاط نسبتاً اول هستند.

برای این که بهتر متوجه شوید که روند محاسباتی تقریبی تا چه حد به مقدار واقعی نزدیک است، مقدار دقیق  $P(L)$  (با شمارش نقاط نسبتاً اول تعیین می‌شود) را با مقادیر آن که در فرمول‌های زیر آورده شده، برای چند مقدار  $L$  مقایسه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} P_1(L) &= \sum_{d \leq L} \mu(d) A\left(\frac{L}{d}\right) \\ P_2(L) &= \frac{\sum_{d \leq L} \mu(d) \pi L^2}{(4d^2)} \\ P_3(L) &= 3L^2/(2\pi) \end{aligned}$$

$P_1(L)$  همان مقدار دقیق است که در رابطه‌ی (۳) آورده شده و  $P_2(L)$  نیز با جایگذاری  $\pi L^2/(4d^2)$  به عنوان تقریبی برای  $A\left(\frac{L}{d}\right)$  در  $P_1(L)$  در نظر گرفته شده است.  $P_3(L)$  از حذف جمله‌ی با مرتبه‌ی پایین  $O(L \log L)$  نسبت به اولین ترم سمت راست رابطه، به دست آمده است. به عنوان مثال برای  $L = 20$  با شمارش دقیق نقاط نسبتاً اول به عدد ۱۹۱ می‌رسیم ( $P(L) = 191$ ).

همچنین:

$$\begin{aligned} P_1(20) &= \mu(1)A(20) + \mu(2)A(10) + \dots + \mu(19)A\left(\frac{20}{19}\right) + \mu(20)A(1) \\ &= (1)(294) + (-1)(69) + (-1)(28) + (0)(15) + (-1)(8) \\ &\quad + (1)(6) + (-1)(4) + (0)(3) + (0)(1) + (1)(1) \\ &\quad + (-1)(1) + (0)(1) + (-1)(1) + (1)(1) + (1)(0) \\ &\quad + (0)(0) + (-1)(0) + (0)(0) + (-1)(0) + (0)(0) = 191 \\ P_2(20) &= \mu(1)\left(\frac{\pi}{4}\right)(20)^2 + \mu(2)\left(\frac{\pi}{4}\right)(10)^2 \dots \mu(19)(\pi/4)(20/19)^2 + \mu(20)(\pi/4)(1)^2 \\ &= 100\pi(1 - 1/4 - 1/9 + 0 - 1/25 + 1/36 - 1/49 + 0 + 0 + 1/100 \\ &\quad - 1/121 + 0 - 1/169 + 1/196 + 1/225 + 0 - 1/289 + 0 - 1/361 + 0) \approx 190.19 \\ P_3(20) &= 3/(2\pi)20^2 = \frac{600}{\pi} \approx 190.99 \end{aligned}$$

مشاهده می‌کنید که روابط تقریبی نیز به اعداد بسیار نزدیک به مقدار واقعی رسیده‌اند. نتایج مندرج در جدول ۱ نیز همین نزدیکی را نشان می‌دهد.

جدول (۱) مقایسه‌ی نتایج دقیق و تقریبی در برآورد نقاط نسبتاً اول به ازای مقادیر مختلف  $L$ .

| $L$           | 10    | 20     | 40     | 100     |
|---------------|-------|--------|--------|---------|
| شمارش نقطه‌ای | 47    | 191    | 765    | 4771    |
| $P_1(L)$      | 47    | 191    | 765    | 4771    |
| $P_2(L)$      | 48.40 | 190.19 | 765.54 | 4777.17 |
| $P_3(L)$      | 47.75 | 190.99 | 763.94 | 4774.65 |

در انتهای پاسخ به سوالات مسئله، مرور مختصری هم بر روی حالتی که مسیر حرکت به جای مربع واحد، یک مستطیل است، داریم.

اگر مسیر حرکت به جای مربع در مستطیلی با اضلاع مجاور به طول به ترتیب  $a > 0$  و  $b > 0$  باشد، مجدداً شمارش زوج‌های نسبتاً اول  $(p, q)$  با تبدیل مسیر بسته به خط با شیب  $\frac{bq}{ap}$  صورت می‌گیرد. در واقع صفحه‌ی باز شده با جابه‌جایی‌های به اندازه‌ی  $ap$  در جهت افقی و  $bq$  در جهت عمودی باعث ایجاد این خط می‌شود (شروع از مبدأ و پایان در  $(ap, bq)$ ). لذا شرط طول حداکثر  $L$  برابر است با:

$$a^2p^2 + b^2q^2 \leq L^2$$

ناحیه‌ی طول محدود به  $L$ ، در ربع نخست یک بیضی با نیم‌محورهای  $L/a$  و  $L/b$  است.

با استدلالی مشابه قبل، می‌توان نشان داد که تعداد مسیرهای ساده با طول حداکثر  $L$  همگرا به  $3L^2/(2\pi ab)$  است.

مشاهده می‌کنید که رابطه‌ی حاصل تنها به مساحت مستطیل وابسته است (دو پارامتر  $a$  و  $b$  به صورت  $ab$  در رابطه ظاهر شده‌اند).

## ۵) نتیجه‌گیری

در مسئله‌ای که در ابتدای این مقاله مطرح شد، هدف تعیین تعداد مسیرهای بسته‌ی بدون تکرار و با حداکثر طول محدود بر روی یک شیء بود. با تغییر بنیادی در مفاهیم "مسیر"، "اندازه" و "شیء"، تعیین کرانی برای تعداد مسیرهای با حداکثر طول محدود به یک عدد مشخص، به مسئله‌ای بسیار پیچیده تبدیل می‌شود. این از نتایج پژوهش‌های مریم بود که نشان داد برای یک سطح هذلولوی ثابت  $X$  با جنس  $g$  و تعداد  $n$  مؤلفه‌ی مرزی یا نشانه‌گذاری مناسب، شمار منحنی‌های بسته‌ی ساده با طول حداکثر  $L$  از قانون توانی پیروی می‌کند [۷، ۸]. در قالب فشرده نتیجه‌ی حاصل در این فرمول داده می‌شود:

$$s_X(L) \sim c_X L^{6g-6+2n}$$

در این رابطه،  $s_X(L)$  تابع شمارش،  $6g - 6 + 2n$  بُعد مؤثر فضای مربوط و  $c_X > 0$  ضریبی وابسته به هندسه‌ی سطح است. مفهوم دقیق موارد مطرح‌شده، صورت دقیق ضریب ثابت و شرایط قضیه در منابع تخصصی بیان می‌شود.

## منابع

- [1] M. Mirzakhani, "The more I spent time on maths, the more excited I got," *The Guardian*, Aug. 13, 2014. [Online]. Available: <https://www.theguardian.com/science/2014/aug/13/interview-maryam-mirzakhani-fields-medal-winner-mathematician>. [Accessed: Oct. 16, 2026].
- [2] Stanford University, "Stanford's Maryam Mirzakhani wins Fields Medal," *Stanford Report*, Aug. 12, 2014. [Online]. Available: <https://news.stanford.edu/stories/2014/08/stanfords-maryam-mirzakhani-wins-fields-medal>. [Accessed: Oct. 16, 2026].
- [3] International Mathematical Union, "Fields Medals 2014: Awardees and contributions," 2014. [Online]. Available: <https://www.mathunion.org/imu-awards/fields-medal/fields-medals-2014>. [Accessed: Oct. 16, 2026].
- [4] Stanford University, "Maryam Mirzakhani, mathematician and Fields Medal winner, dies at Stanford," *Stanford Report*, Jul. 15, 2017. [Online]. Available: <https://news.stanford.edu/stories/2017/07/maryam-mirzakhani-stanford-mathematician-and-fields-medal-winner-dies>. [Accessed: Oct. 16, 2026].
- [5] International Mathematical Union, Committee for Women in Mathematics, "May 12: Celebrating women in mathematics." [Online]. Available: <https://www.mathunion.org/cwm/cwm-initiatives/may-12-celebrating-women-mathematics>. [Accessed: Oct. 16, 2026].
- [6] International Mathematical Union, "The work of Maryam Mirzakhani," Fields Medal background document, 2014.
- [7] M. Mirzakhani, *Simple Geodesics on Hyperbolic Surfaces and the Volume of the Moduli Space of Curves*, Ph.D. dissertation, Harvard University, Cambridge, MA, USA, 2004.
- [8] M. Mirzakhani, "Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces," *Ann. Math.*, vol. 168, no. 1, pp. 97–125, 2008, doi: 10.4007/annals.2008.168.97.
- [9] B. Dozier, "Closed geodesics on surfaces," *Snapshots of Modern Mathematics from Oberwolfach*, no. 13, 2022, doi: 10.14760/SNAP-2022-013-EN.
- [10] F. Arana-Herrera, "Counting problems from the viewpoint of ergodic theory: From primitive integer points to simple closed curves," *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, vol. 45, no. 5, pp. 1281–1328, 2025, doi: 10.1017/etds.2024.76.
- [11] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*. New York, NY, USA: Springer, 1976, chs. 2 and 11.
- [12] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6th ed. Oxford, U.K.: Oxford University Press, 2008, secs. 16 and 18.

The Corridor of Comprehensive Knowledge (CCK) is a not-for-profit educational organization that develops problems, activities, and learning materials connecting mathematics, science, technology, art, and other fields within shared contexts.

Its work includes interdisciplinary workshops, thematic learning scenarios, original educational resources, and the interdisciplinary educational journal *The CCK CLERESTORY*, all designed to make connections visible, deepen conceptual understanding, and foster curiosity and critical thinking.

[cck@theccck.com](mailto:cck@theccck.com)  
[www.theccck.com](http://www.theccck.com)